3.5 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ : $E = \pi\rho^2$

Σημείωση : Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, χάριν ευκολίας αναφέρεται σαν εμβαδόν του κύκλου.

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Για το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου :

Από τα δεδομένα προσδιορίζω την ακτίνα του κύκλου και εφαρμόζω τον τύπο.

2.

Εμβαδόν όταν ξέρω την διάμετρο δ : $E = \pi\frac{\delta^2}{4}$

3.

Εμβαδόν κυκλικού δακτυλίου : Κυκλικός δακτύλιος ονομάζεται η περιοχή μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων.
Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου το βρίσκουμε αν από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου αφαιρέσουμε το εμβαδόν του μικρού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν Ε το εμβαδόν, ρ η ακτίνα και L το μήκος ενός κύκλου, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Ε	0,1256	28,26	50,24	490,625	628	1962,5
ρ	0,2	3	4	12,5	$10\sqrt{2}$	25
L	1,256	18,84	25,12	78,5	$62{,}8\sqrt{2}$	157

Θεωρία 1

Προτεινόμενη λύση

1η στήλη : $L = 2\pi\rho$ οπότε $1{,}256 = 2\cdot 3{,}14\rho$ απ' όπου $\rho = 0{,}2$
$E = \pi\rho^2 = 3{,}14\cdot 0{,}2^2 = 0{,}1256$

2η στήλη : $E = \pi\rho^2$ άρα $28{,}26 = 3{,}14\rho^2$, $\rho^2 = \dfrac{28{,}26}{3{,}14} = 9$, $\rho = 3$

$L = 2\cdot 3{,}14\cdot 3 = 18{,}84$

3η στήλη : $E = \pi\rho^2 = 3{,}14\cdot 4^2 = 50{,}24$ και $L = 2\cdot 3{,}14\cdot 4 = 25{,}12$

4η στήλη : Ομοίως με την 1η βρίσκουμε $\rho = 12{,}5$ και $E = 490{,}625$

5η στήλη: Ομοίως με την 2η βρίσκουμε $\rho = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ και $L = 62{,}8\sqrt{2}$

6η στήλη : Ομοίως με την 3η βρίσκουμε $E = 1962{,}5$ και $L = 157$

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

2.

Σε μια πιτσαρία, μία πίτσα με ακτίνα 7cm κοστίζει 7 €, ενώ μια πίτσα του ίδιου τύπου με διάμετρο 8 cm κοστίζει 8,7€. Ποια έχει ποιό συμφέρουσα τιμή ;

Προτεινόμενη λύση

Το εμβαδόν της πίτσας με ακτίνα $\rho = 7$ cm είναι $E_1 = 3{,}14\cdot 7^2 = 153{,}86\ cm^2$
Το εμβαδόν της πίτσας με διάμετρο 8 δηλαδή ακτίνας $\rho = 4$ cm είναι $E_2 = 3{,}14\cdot 4^2 =$
$= 50{,}24\ cm^2$

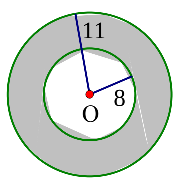
Είναι $E_1 > E_2$ άρα ποιό συμφέρουσα τιμή έχει η πρώτη πίτσα

3.

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι ακτίνων $\rho_1 = 8$cm και $\rho_2 = 11$cm. Να βρείτε την ακτίνα ενός τρίτου κύκλου του οποίου το εμβαδόν να είναι ίσο με το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου των δύο πρώτων κύκλων

Θεωρία 1- σχόλιο 3

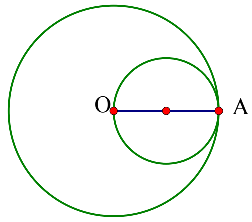
Προτεινόμενη λύση



$E_2 = 3{,}14\cdot 11^2 = 379{,}94$ και $E_1 = 3{,}14\cdot 8^2 = 200{,}96$
Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου είναι
$E = 379{,}94 - 200{,}96 = 178{,}98\ cm^2$
Αν ρ είναι η ζητούμενη ακτίνα πρέπει $178{,}98 = 3{,}14\rho^2$ άρα
$\rho^2 = 57$
$\rho = \sqrt{57}$ cm

4.

Αν ΟΑ = 24 cm, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται μεταξύ των δύο κύκλων του διπλανού σχήματος.

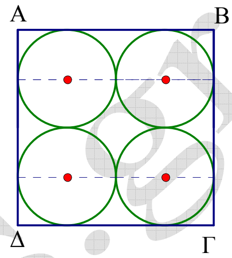


Προτεινόμενη λύση

$E_{\text{μεγάλου κύκλου}} = 3{,}14 \cdot 24^2 = 1808{,}64 \text{ cm}^2$
$E_{\text{μικρού κύκλου}} = 3{,}14 \cdot 12^2 = 452{,}16 \text{ cm}^2$
$E_{\text{ζητούμενο}} = E_{\text{μεγάλου κύκλου}} - E_{\text{μικρού κύκλου}} = 1808{,}64 - 452{,}16 = 1356{,}48 \text{ cm}^2$

5.

Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 8cm. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που είναι μεταξύ του τετραγώνου και των κύκλων.



Προτεινόμενη λύση

Ο κάθε κύκλος όπως είναι φανερό έχει ακτίνα ρ = 2cm
Το ζητούμενο εμβαδόν προκύπτει αν από το εμβαδόν του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδόν των τεσσάρων κύκλων.
$E_{\text{τετραγώνου}} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$ και $E_{\text{κύκλου}} = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56 \text{ cm}^2$
$E_{\text{ζητούμενο}} = 64 - 4 \cdot 12{,}56 = 13{,}76 \text{cm}^2$.

6.

Με διαμέτρους τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου κατασκευάζουμε τρείς κύκλους . Να συγκρίνεται το άθροισμα των εμβαδών των κύκλων με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές με το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο την υποτείνουσα.

Προτεινόμενη λύση

Σχόλιο 2

Έστω ΑΒΓ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ΒΓ.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$
Οι κύκλοι με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ έχουν εμβαδόν

$$E_{AB} = \pi\frac{AB^2}{4}, \quad E_{A\Gamma} = \pi\frac{A\Gamma^2}{4} \quad \text{και} \quad E_{B\Gamma} = \pi\frac{B\Gamma^2}{4}$$

$$E_{AB} + E_{A\Gamma} = \pi\frac{AB^2}{4} + \pi\frac{A\Gamma^2}{4} = \frac{\pi AB^2 + \pi A\Gamma^2}{4} =$$

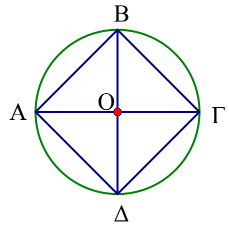
$$= \frac{\pi(AB^2 + A\Gamma^2)}{4} = \pi\frac{B\Gamma^2}{4} = E_{B\Gamma}$$

Επομένως το εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο την υποτείνουσα ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των κύκλων με διαμέτρους τις κάθετες πλευρές .

7.

Ένα τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλου με εμβαδόν 50,24 cm^2. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου.

Προτεινόμενη λύση



$E_{κύκλου} = 50{,}24$ άρα $3{,}14ρ^2 = 50{,}24$, $ρ^2 = 16$, $ρ = 4$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε $AB^2 = OB^2 + OA^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$

Συνεπώς $E_{τετραγώνου} = AB^2 = 32\ cm^2$.

8.

Δύο κύκλοι είναι ομόκεντροι και η ακτίνα του εξωτερικού κύκλου είναι $5\sqrt{2}$. Να υπολογίσετε την ακτίνα του εσωτερικού κύκλου, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν αυτού είναι ίσο με το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου των δύο κύκλων

Προτεινόμενη λύση

Αν ρ είναι η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου τότε το εμβαδόν αυτού είναι $E = πρ^2$

Το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου είναι ίσο με

$E_{δακτ.} = π(5\sqrt{2})^2 - πρ^2$

Σχόλιο 3

Από την υπόθεση είναι $π(5\sqrt{2})^2 - πρ^2 = πρ^2$ άρα

$50π = 2πρ^2$

$ρ^2 = 25$

$ρ = 5$

9.

Ένας κύκλος έχει εμβαδόν αριθμητικά ίσο με το μήκος του. Να υπολογίσετε την ακτίνα του.

Προτεινόμενη λύση

Ισχύει $πρ^2 = 2πρ$ άρα $ρ^2 = 2ρ$

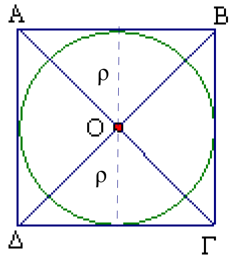
$ρ^2 - 2ρ = 0$

$ρ(ρ-2) = 0$

$ρ = 0$ η $ρ = 2$ η τιμή $ρ = 0$ απορρίπτεται άρα $ρ = 2$

10.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με διαγώνιο $5\sqrt{2}$ cm. Να βρείτε



α) την πλευρά του τετραγώνου
β) το εμβαδόν του κύκλου
γ) το εμβαδόν της περιοχής που είναι μεταξύ του τετραγώνου και του κύκλου.

Προτεινόμενη λύση

α)
Έστω α η πλευρά του τετραγώνου.
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $α^2 + α^2 = ΑΓ^2$ άρα

$$2α^2 = (5\sqrt{2})^2$$
$$2α^2 = 50$$
$$α^2 = 25$$
$$α = 5 \text{ cm}$$

β)
Η ακτίνα του κύκλου είναι φανερό ότι είναι ίση με το μισό της πλευράς του τετραγώνου, επομένως $ρ = \frac{5}{2} = 2{,}5$ cm

Το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με $E_{κυκλ} = 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 19{,}625 \text{cm}^2$

γ)
Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_τ = 5^2 = 25 \text{ cm}^2$
Η περιοχή μεταξύ του τετραγώνου και του κύκλου έχει εμβαδόν
$E' = E_τ - E_{κυκλ.} = 25 - 19{,}625 = 5{,}375 \text{cm}^2$

11.

Τετράγωνο έχει περίμετρο 10cm και κύκλος έχει μήκος 10cm. Ποιό σχήμα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;

Προτεινόμενη λύση

Η πλευρά του τετραγώνου είναι $α = \frac{10}{4} = 2{,}5$ cm
και το εμβαδόν του $E_τ = 2{,}5^2 = 6{,}25 \text{ cm}^2$
Το μήκος του κύκλου είναι $L = 2πρ$ οπότε $10 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot ρ$

$$ρ = \frac{10}{6{,}28} = 1{,}59 \text{ περίπου}$$

Το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = 3{,}14 \cdot 1{,}59^2 = 7{,}93 \text{ cm}^2$
Προφανώς το εμβαδόν του κύκλου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου.